

This Question Paper contains 20 printed pages.

(Part - A & Part - B)

Sl.No.

050(G)

(MARCH, 2017)
(SEMESTER - IV)

ગાણીત

Part - A : Time : 1 Hour / Marks : 50

Part - B : Time : 2 Hours / Marks : 50

* વર્ણન જરૂર લેવા સાચો જવાબ છે.

પ્રશ્ન પેપરનો સેટ નંબર જેની સામેનું વર્તુળ OMR શીટમાં ઘટ્ટ કરવાનું રહે છે.
Set No. of Question Paper, circle against which is to be darken in OMR sheet.

03

(Part - A)

Time : 1 Hour]

[Maximum Marks : 50

સૂચનાઓ:

- 1) આ પ્રશ્નપત્રના ભાગ - A માં હેતુલક્ષી પ્રકારના (M.C.Q) 50 પ્રશ્નો છે. બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે.
- 2) પ્રશ્નોની ક્રમ સંખ્યા 1 થી 50 છે અને દરેક પ્રશ્નનો ગુણ 1 છે.
- 3) કાળજીપૂર્વક દરેક પ્રશ્નનો અભ્યાસ કરી સાચો વિકલ્પ પસંદ કરવો.
- 4) આપને અલગથી આપેલ OMR પત્રકમાં જે તે પ્રશ્ન નંબર સાથે (A) O, (B) O, (C) O, (D) O આપેલા છે. તે પ્રશ્નનો જે જવાબ સાચો હોય તેના વિકલ્પ પરના વર્તુળને પેનથી પૂર્ણ ઘટ્ટ ● કરવાનું રહેશે.
- 5) રફ કાર્ય હેતુ આ ટેસ્ટ બુકલેટમાં આપેલી જગ્યા પર કરવાનું રહેશે.
- 6) પ્રશ્નપત્રમાં ઉપરની જમણી બાજુમાં આપેલા પ્રશ્નપત્રક સેટ નં. ને OMR પત્રકમાં આપેલી જગ્યામાં લખવાનું રહેશે.
- 7) વિદ્યાર્થીઓ જરૂર જણાય ત્યાં સાદા કેલક્યુલેટર અને લોગ ટેબલનો ઉપયોગ કરી શકશે.
- 8) આ પ્રશ્નપત્રમાં વપરાયેલ સંજ્ઞાઓને તેના પ્રચલિત અર્થ છે.

$$1) \int \frac{1}{x^2 - x} dx = \text{---} + C$$

(A) $\log \left| \frac{x}{x+1} \right|$

(C) $\log \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$

(B) $\log \left| \frac{x}{x-1} \right|$

(D) $\log \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

$$\int \frac{1}{x^2 - x} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} dx = \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$$

$$= \log \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$$

$$= \log \left| \frac{x}{x} - \frac{1}{x} \right| + C$$

$$= \log \left| 1 - \frac{1}{x} \right| + C$$

2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x} dx$

(A) $2\sqrt{2}$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx$

(B) $1 - \sqrt{2}$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x - \sin x| dx$

(C) $\sqrt{2} - 1$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$ (∵ $\sin x > \cos x$ for $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$)

(D) $\sqrt{2} + 1$ $= [-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -0 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

3) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cdot \log \tan x dx = \dots$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x) \log \tan(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(\pi - 2x) \log \tan(\frac{\pi}{2} - x) dx$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cdot \log \cot x dx$

(C) 2 (D) $0 = - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \log \tan x dx$

$\therefore I = -I$
 $\therefore 2I = 0$
 $\therefore I = 0$

4) $\int_{-5}^{-1} |x-1| dx = \int_{-5}^{-1} (x-1) dx = \int_{-5}^{-1} (1-x) dx$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{11}{2}$

(C) $\frac{13}{2}$ (D) $-\frac{9}{2}$

$= [x]_{-5}^{-1} - [\frac{x^2}{2}]_{-5}^{-1} = -4 + 5 - \frac{16}{2} + \frac{25}{2} = 1 - 8 + \frac{25}{2} = \frac{-14 + 25}{2} = \frac{11}{2}$

5) $\int \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{-1} dx = \frac{1}{2} \log\left(\frac{17}{2}\right) + c, b = \dots (b > 0)$

(A) 3 (B) 2

(C) 4 (D) 5

$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \log \frac{17}{2}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \log \frac{17}{2}$

$= \frac{1}{2} (\log(x^2+1)) = \log \frac{17}{2}$

$\therefore \log(b^2+1) - \log 2 = \log \frac{17}{2}$

$\therefore \log \frac{b^2+1}{2} = \log \frac{17}{2}$

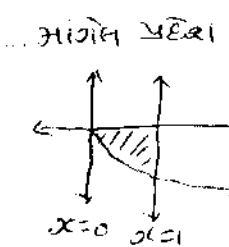
$\therefore \frac{b^2+1}{2} = \frac{17}{2}$

$\therefore b^2+1 = 17 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4 \Rightarrow b = 4$

10) વક્ર $y = -2\sqrt{x}$ તથા રેખાઓ $x=0$, $x=1$ તથા $y=0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ _____ છે. $y = -2\sqrt{x}$
 $\Rightarrow y^2 = 4x$

રફ કાર્ય

(A) $\frac{4}{3}$



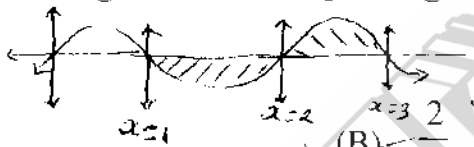
(C) $\frac{8}{3}$

(B) $-\frac{4}{3}$

(D) $\frac{2}{3}$

મંગોલ પ્રદેશ $A = |D|$
 જ્યાં $I = \int_0^1 (-2\sqrt{x}) dx$
 $= -2 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = -\frac{4}{3} |$
 $\therefore A = |-\frac{4}{3}| = \frac{4}{3}$

11) વક્ર $f(x) = \sin \pi x$ નું X-અક્ષ સાથે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ _____ છે. $x \in [1, 3]$.



(A) $\frac{1}{\pi}$

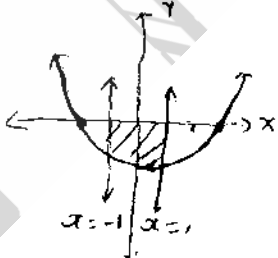
(C) $\frac{3}{\pi}$

(B) $\frac{2}{\pi}$

(D) $\frac{4}{\pi}$

આવૃત્તી પડતી મંગોલ ક્ષેત્રફળ
 $A = |D_1| + |D_2|$
 જ્યાં $I_1 = \int_1^2 \sin \pi x dx = \left[-\frac{\cos \pi x}{\pi} \right]_1^2$
 $= -\frac{1-1}{\pi} = 0$
 $I_2 = \int_2^3 \sin \pi x dx = \left[-\frac{\cos \pi x}{\pi} \right]_2^3$
 $= \frac{1+1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$
 $\therefore A = |-\frac{2}{\pi}| + |\frac{2}{\pi}| = \frac{4}{\pi}$

12) વક્ર $y = x^2 - x - 6$, $y=0$, $x=-1$ અને $x=1$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ _____ છે.



(A) $\frac{125}{6}$

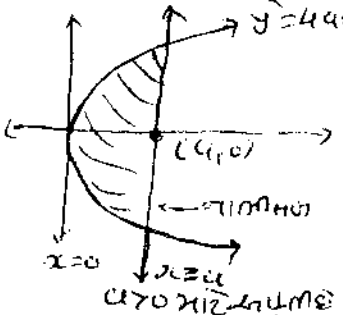
(C) $\frac{37}{3}$

(B) $\frac{37}{6}$

(D) $\frac{34}{3}$

આવૃત્તી પડતી મંગોલ ક્ષેત્રફળ $A = |D|$
 જ્યાં $I = \int_{-1}^1 (x^2 - x - 6) dx$
 $= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6 \right] - \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 6 \right]$
 $= \frac{2}{3} - 12 = \frac{2-36}{3} = -\frac{34}{3}$
 $\therefore A = |-\frac{34}{3}| = \frac{34}{3}$

13) પરવલય $y^2 = 4ax$ અને તેના નાભિલંબ વડે બનતા આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 24 એકમ છે તો $a =$ _____



(A) 9

(B) ± 3

(C) $+\frac{3}{2}$

(D) ± 6

અહીં ફક્ત યોગ્ય પ્રદેશ જ માનવું પડે છે.
 $A = 2 |I|$ જ્યાં $I = \int_0^a \sqrt{4ax} dx$
 $= 2\sqrt{a} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^a = \frac{4}{3} \sqrt{a} (a^{3/2} - 0)$
 $I = \frac{4}{3} a^2$
 $\therefore A = 2 \left| \frac{4}{3} a^2 \right| = \frac{8}{3} a^2$
 $\frac{8}{3} a^2 = 24$
 $\therefore a^2 = 9$
 $\therefore a = \pm 3$

રફ કાર્ય

- 14) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ની કક્ષા અને પરિમાણ અનુક્રમે _____ છે. $\therefore \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
- (A) 4, 2
 (B) 2, 2
 (C) 2, 1
 (D) 1, 2

- 15) સમતલમાં આવેલી 7 ઢાળવાળી તમામ રેખાઓનાં સમુદાયના વિકલ સમીકરણની કક્ષા _____ હોય. સ્ત્રેણાનો કોણ $= \frac{dy}{dx}$
- (A) 3
 (B) 2
 (C) 1
 (D) 0

- 16) વિધેય $x^2 f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ ઘાતવાળું સમપરિમાણીય વિધેય છે. $\therefore f(x, y) = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \phi\left(\frac{y}{x}\right) = x^c \phi\left(\frac{y}{x}\right)$
- (A) 4
 (B) 2
 (C) 0
 (D) 1

- 17) વિકલ સમીકરણ $x \frac{dy}{dx} + y = 0$; $y(2) = 1$ નો વિશિષ્ટ ઉકેલ _____ છે.
- (A) $y = 2x$
 (B) $xy = 2$
 (C) $x - y = 2$
 (D) $x + y = 2$
- $\therefore x \frac{dy}{dx} = -y$
 $\therefore \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$
 $\therefore \log y = -\log x + \log C$
 $\therefore \log(xy) = \log C$
 $\therefore xy = C$ — (1)
 $x = 2$ અને $y = 1$ મૂકતા
- (2) (1) = C
 $\therefore C = 2$
 \therefore સ્ત્રી (1) પરથી
 $xy = 2$
 જે વિશિષ્ટ ઉકેલ છે

18) વિકલ સમીકરણ $\sin^2 x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 1$ નો સંકલ્પકારક અવયવ _____ છે.

- (A) $e^{\sec x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} + y \cot x = \cot x$
 (B) $e^{-\tan x}$ $\therefore P(x) = \cot x, Q(x) = \cot x$
 (C) $e^{-\cot x}$ \therefore સીધા પ્રથમ અવયવ $= e^{\int P(x) dx}$
 $= e^{\int \cot x dx}$
 $= e^{-\cot x}$
 (D) $e^{\cot x}$

19) વક્રના કોઈપણ બિંદુ આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ, તે બિંદુના y-યામ જેટલો છે. વક્ર (0, 1) માંથી પસાર થતો હોય તો આ વક્રનું સમીકરણ _____ છે.

- (A) $y = e^x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = y$ (B) $y = Cx$ \therefore સમીકરણ (A) પરથી
 (C) $y = e^{2x}$ $\therefore \frac{dy}{y} = 2 dx$ $\therefore \log y = 2x + C$ $\therefore y = e^{2x}$ છે
 (D) $xy = C$ $\therefore \log y = \log C - \log x$

કારણ વક્ર (0, 1) માંથી પસાર થાય છે
 $\therefore \log 1 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

20) વિકલ સમીકરણ $2x \frac{dy}{dx} - y = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ _____ દર્શાવે છે.

- (A) ઉપવલય $\therefore 2x \frac{dy}{dx} = y$ (B) વર્તુળ
 (C) પરવલય $\therefore \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$ (D) રેખા
 $\therefore \log y = \log x + \log c$
 $\therefore \log y^2 = \log(cx) \Rightarrow y^2 = cx$ જે પરવલયનું સમીકરણ છે.

21) જો α, β, γ એ સદિશ \vec{x} ના દિક્ષૂણાઓ હોય તો α, β, γ એ \vec{x} ના દીર્ઘ શૂણા છે
 $1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma =$ _____

- (A) 2 (B) 1
 (C) 0 (D) -1
 $\therefore (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 1$
 $\therefore 1 + (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 2$
 $= 1 + 2(\cos^2 \alpha - 1) + 2(\cos^2 \beta - 1) + 2(\cos^2 \gamma - 1)$
 $= -2 + 2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$
 $= -2 + 2(1)$
 $= -2 + 2$
 $= 0$

22) જો $|\vec{x}|=|\vec{y}|=1$ તથા $\vec{x} \perp \vec{y}$ તો $|\vec{x} \times \vec{y}| = \underline{\hspace{2cm}}$ $|\vec{x} \times \vec{y}|$
 (A) 0 (B) 2 $= |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \theta$
 (C) -1 (D) 1 $= 1 \cdot 1 \cdot \sin 90$
 $= 1$

23) જો $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=1$ તો $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$ $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = 1^2+1^2+1^2+2\vec{a} \cdot \vec{b}+2\vec{b} \cdot \vec{c}+2\vec{a} \cdot \vec{c}$
 (A) 2 (B) 0 $\therefore 1=1+1+1+2(\vec{a} \cdot \vec{b}+\vec{b} \cdot \vec{c}+\vec{a} \cdot \vec{c})$
 (C) -1 (D) 1 $\therefore 2(\vec{a} \cdot \vec{b}+\vec{b} \cdot \vec{c}+\vec{a} \cdot \vec{c}) = -2$
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -1$

24) જો $\vec{a}=(2,1,1)$ અને $\vec{b}=(-4,-2,4)$ તો $\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$
 (A) $(-2, -1, -1)$ (B) 1 $\text{જો } \vec{a} \cdot \vec{b} = -8 -2 + 4 = -6$
 $|\vec{b}| = \sqrt{16+4+16} = 6$
 (C) -1 (D) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ $\text{જો } \text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$
 $= \frac{-6}{36} (-4, -2, 4)$
 $= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

25) જોના વિકર્ણો \vec{a} તથા \vec{b} હોય તેવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું

ક્ષેત્રફળ = $\underline{\hspace{2cm}}$ જ્યાં $|\vec{a}|=1$, $\vec{b}=(3,0,-4)$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$
 \vec{a} અને \vec{b} વિકર્ણો વાળા સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$
 (A) $\frac{5}{4}$ $|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5$ (B) $\frac{5}{2}$ $= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \frac{\pi}{6}$
 (C) 10 (D) 5 $= \frac{1}{2} (1)(5) \cdot \frac{1}{2}$
 $= \frac{5}{4}$

26) જો $|\vec{a}|=1$ તથા $\vec{a} \times \vec{b} = (1, 2, 3)$ તો $\vec{a} \times [\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})] = \underline{\hspace{2cm}}$
 (A) $(1, 0, 0)$ $\vec{a} \times [\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})] = (\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{a} \times \vec{b})$
 (B) $(-1, -2, -3)$ $= (0) \vec{a} - (1) (1, 2, 3)$
 (C) $(1, 2, 3)$ $= 0 - (1) (1, 2, 3)$
 (D) $(0, 0, 0)$ $= (-1, -2, -3)$

27) જો $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z}) = (\bar{x} \times \bar{y}) \times \bar{z}$ તો $\bar{y} \times (\bar{z} \times \bar{x}) =$ _____

$\therefore \bar{z} \times (\bar{x} \times \bar{y}) = -(\bar{z} \times (\bar{y} \times \bar{x}))$

(A) $\bar{x} \times (\bar{z} \times \bar{y}) = (\bar{x} \times \bar{z}) \bar{y} - (\bar{x} \times \bar{y}) \bar{z} = -(\bar{z} \times \bar{y}) \bar{x} + (\bar{z} \times \bar{x}) \bar{y}$

$\therefore (\bar{x} \times \bar{y}) \bar{z} = (\bar{z} \times \bar{y}) \bar{x}$

(B) $\bar{x} \times (\bar{y} \times \bar{z})$ એ $\bar{y} \times (\bar{z} \times \bar{x}) = (\bar{y} \times \bar{x}) \bar{z} - (\bar{y} \times \bar{z}) \bar{x}$

$= (\bar{z} \times \bar{y}) \bar{x} - (\bar{z} \times \bar{x}) \bar{y}$
 $= 0$

(C) $\bar{z} \times (\bar{x} \times \bar{y})$

(D) 0

28) સમતલો $2x - y + 2z = 1$ અને $4x - 2y + 4z = k$ વચ્ચેનું લંબઅંતર $\frac{1}{6}$ છે

તો $k =$ _____

(A) 2 $4x - 2y + 4z = 2 \dots (3)$

(B) 1

(C) -3 એ સમતલો વચ્ચેનું લંબઅંતર $\frac{1}{6}$ છે

(D) -1

$\therefore \frac{1}{6} = \frac{|k-1|}{\sqrt{16+4+16}}$

$\therefore \frac{1}{6} = \frac{|k-1|}{6}$

$\therefore |k-1| = 1$
 $\therefore k-1 = 1$ એટલે $k = 2$
 $\therefore k-1 = -1$ એટલે $k = 0$

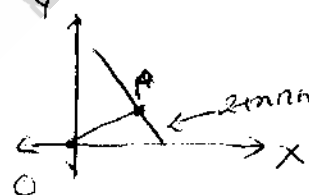
29) ત્રિકોણબિંદુમાંથી સમતલ પરનો લંબપાદ (1, 2, 3) હોય તો સમતલનું સમીકરણ _____ થાય.

(A) $x + 2y + 3z = 14$

(B) $x + 2y + 3z = 1$

(C) $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$

(D) $x + 2y + 3z = 6$



અહીં સમતલનો સમીકરણ

$\vec{n} = \vec{OP} = (1, 2, 3) - (0, 0, 0)$

$\therefore \vec{n} = (1, 2, 3)$

તથા સમતલ પરગણિત $A(x) = (1, 2, 3)$ જુ લેવાય

$\therefore \vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$ એમ

$(x, y, z) \cdot (1, 2, 3) = (1, 2, 3) \cdot (1, 2, 3)$

$\therefore x + 2y + 3z = 14 + 9$

$\therefore x + 2y + 3z = 14$ જે અંતિમ સમતલ છે

રફ કાર્ય

30) જો રેખા $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+k}{2}$ એ સમતલ $2x - 4y + z = 7$ માં આવેલી હોય તો $k = \underline{\hspace{2cm}}$. સૃષ્ટિ રેખા પર $(4, 2, k)$ છે

અને રેખા સમતલમાં છે

(A) -6 $\therefore (4, 2, -k)$ પણ સમતલમાં છે

(B) 6 $= 2(4) - 4(2) - k = 7$

$8 - 8 - k = 7$

(C) -7 $-k = 7$

$k = -7$

(D) 7

31) સમતલો $2x + 3y + z - 1 = 0$ અને $x + y - z - 7 = 0$ ની છેદરેખાની દિશા

_____ છે. સમતલ (1) નો સ્થાનિત્વ $\vec{n}_1 = (2, 3, 1)$

(A) $(4, -3, 1)$ સમતલ (2) નો સ્થાનિત્વ $\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$

(B) $(-4, 3, 1)$

(C) $(-4, -3, 1)$

(D) $(4, 3, 1)$

રેખાની દિશા $\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-3-1) - \hat{j}(-2-1) + \hat{k}(2-3)$

$= -4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore \vec{r} = (-4, 3, -1)$ \therefore દિશા $(4, -3, 1)$

32) સમતલ $x + 2y - 2z = 6$ ના અક્ષો સાથેના છેદબિંદુઓ જેનાં શિરોબિંદુઓ હોય તેવા ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર = _____

(A) $(2, 1, -1)$

(B) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

(C) $(-2, -1, 1)$

(D) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$x + 2y - 2z = 6$

$\therefore \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-3} = 1$

$\therefore x$ -અક્ષ, y -અક્ષ, z -અક્ષ સાથેના

છેદબિંદુઓ $A(6, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, -3)$ છે

$\therefore \Delta ABC$ નું મધ્યકેન્દ્ર $= \left(\frac{6}{3}, \frac{3}{3}, \frac{-3}{3}\right)$

$= (2, 1, -1)$ પણ

પણ સાચા
 ફરકો રેખાની દિશા
 અને ત્રિકોણ ગણાય

33) સમતલ $x = -3$ નો અભિલંબ _____ છે.

(A) $(-3, 0, 3)$

(B) $(-3, 0, -3)$

(C) $(3, 0, 0)$

(D) $(0, -3, -3)$

સમતલ $x = -3$ નો સ્તરભીત્ર

$\vec{n} = (1, 0, 0)$ થાય

ગર $\vec{n} = (3, 0, 0)$ પણ થાય

અથવા કોઈ $\vec{n} = (k, 0, 0)$ થાય

$k \neq 0$

34) રેખાઓ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ અને $x = k+1, y = 2k-1, z = 2k+3, k \in \mathbb{R}$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ _____ છે.

$\frac{\pi}{2}$

રેખા (1) માટે $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$

રેખાની દિશા $\vec{l} = (2, 1, 2)$ થાય

રેખા (2) ની દિશા $\vec{m} = (1, 2, 2)$

$\therefore \vec{l} \cdot \vec{m} = 2 + 2 - 4 = 0$

$\therefore \vec{l} \perp \vec{m}$

\therefore બંને રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો $\frac{\pi}{2}$ છે

$\frac{\pi}{3}$

1) $\operatorname{cosec}^{-1} \frac{3}{4}$

35) સમતલ $x + y + z + 1 = 0$ ને $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$ સ્વરૂપમાં ફેરવવામાં આવે તો $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma =$ _____

$x + y + z + 1 = 0$ નું કોમ્પોનન્ટ્સની સ્કેલર

(A) $-\sqrt{3}$

$p = \frac{|1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(B) 3

રેખા (1) ની દિશા $x + y + z = -1$

(C) -3

$\therefore x(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + y(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + z(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $\sqrt{3}$

રેખા (2) ની દિશા છે

$\therefore \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

રફ કાર્ય

36) $f(x) = \sqrt{x}(3-x)$, $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ની નિર્ણાયક સંખ્યાઓ

_____ છે.

$\therefore f(x) = 3\sqrt{x} - x^{3/2}$

$\therefore f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2}$

(A) $0, \frac{3}{2}$

(B) $0, -1$

(C) $1, 2$

(D) $0, 1$

રવે નીલકાંઠા સંખ્યાઓ $f'(x) = 0$
 $\therefore \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = 0$
 $\therefore 1 - x = 0$
 $\therefore x = 1$

37) $x^2 = 4y$ ના $(2, 1)$ માંથી પસાર થતાં સ્પર્શકનું સમીકરણ _____ છે.

અહીં $x^2 = 4y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$

(A) $x - y + 1 = 0$

(B) $x - y - 1 = 0$

(C) $x - y + 1 = 0$

(D) $x + y + 1 = 0$

સ્પર્શકનું સમીકરણ
 $2y - 1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,1)} (x - 2)$
 $2y - 1 = \frac{x}{2} (x - 2)$

અહીં $x = 0$ એ સ્પર્શકનું સમીકરણ છે જાણે તે પણ નીલકાંઠા સંખ્યાઓ સ્પર્શકનું સમીકરણ
 $y - 1 = 1(x - 2)$
 $y - 1 = x - 2$
 $x - y - 1 = 0$

38) ગોલકનું ઘનફળ π સે.મી.³/સે. ના દરે વધે છે. જ્યારે ત્રિજ્યા 2 સે.મી. હોય ત્યારે ત્રિજ્યા વધવાનો દર _____ સે.મી./સે. છે.

(A) 36

(B) 16

(C) $\frac{1}{16}$

(D) $\frac{1}{36}$

રવે $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
 $\frac{dV}{dt} = \pi$ સે.મી.³/સે.
 $r = 2$ સે.મી.
 $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$
 $\pi = 4\pi (2)^2 \frac{dr}{dt}$
 $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{16}$ સે.મી./સે.

39) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ નું સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય _____ છે.

(A) -4

(B) 2

(C) 4

(D) 2

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
 સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય માટે
 $f'(x) = 0$
 $1 - \frac{1}{x^2} = 0$
 $x^2 - 1 = 0$
 $x^2 = 1$
 $x = \pm 1$
 રવે $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$
 $\therefore f(1)$ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય
 $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$
 $\therefore f(-1)$ સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્ય
 $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$
 એ સ્થાનીય મહત્તમ છે.

40) ગોલકની ત્રિજ્યાના માપનમાં 1% ત્રુટિ પ્રવેશે તો તેના ઘનફળના માપનમાં આશરે _____ ત્રુટિ પ્રવેશે.

(A) 4%

(B) 2%

(C) 3%

(D) 1%

રવે ઘનફળ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
 $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$
 અહીં $\delta r = 1\%$
 $\delta r = \frac{r}{100}$
 $\delta V = \frac{dV}{dr} \delta r$
 $= 4\pi r^2 \cdot \frac{r}{100}$
 $= \frac{4\pi r^3}{100}$
 $= \frac{V}{100} = 1\%$

(P.T.O.)
 $= \frac{4\pi r^3}{100} = 4\% V$

રફ કાર્ય

41) $y^2 = x$ પરના જે બિંદુએ સ્પર્શક X-અક્ષની ધન દિશા સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણા બનાવે તે બિંદુ _____ છે. દિશા સાથે $\frac{\pi}{4}$ માપનો ખૂણો બનાવે છે.

(A) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ત્યારે $x^2 = 2$ (B) (0, 0)
 સ્પર્શકનો ઢાળ = $\tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$

(C) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (D) (2, 1)
 $\frac{dy}{dx} = 1$
 $\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}) = 1$
 $\frac{d}{dx}(x) = 1$
 $x = 1$
 $y = \frac{1}{2}$
 મંગેલ બિંદુ $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ છે

42) $f(x) = x^x, x \in \mathbb{R}^+$ એ _____ અંતરાલ માટે ઘટતું વિધેય છે.

(A) $(\frac{1}{e}, \infty)$ (B) (0, 1)
 $f(x) = e^{x \log x} \Rightarrow f'(x) = e^{x \log x} (x \cdot \frac{1}{x} + \log x)$
 $f'(x) = x^x (1 + \log x)$
 જો $x < \frac{1}{e}$ તો $x < e^{-1}$
 $\log x < \log e^{-1}$
 $\log x < -1$
 $\log x - 1 < 0$
 $1 + \log x < 0$
 કો $x^2 > 0$ છે
 માટે $x < \frac{1}{e}$ માટે $f'(x) < 0$
 $\therefore f(x)$ ઘટતું છે

43) વક્રો $y = x^2$ અને $x^3 + 6y = 7$ એ (1, 1) બિંદુએ છેદતા હોય તો ત્યાં બનતા ખૂણાનું માપ _____ છે.

cut ① માટે $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow$ સ્પર્શકનો ઢાળ $m_1 = \frac{dy}{dx}(1,1) = 2(1) = 2$
 cut ② માટે $3x^2 + 6 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{6} = -\frac{1}{2}x^2$
 $\frac{dy}{dx}(1,1) = -\frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$
 (A) $\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{\pi}{3}$
 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$
 સ્પર્શકોનો ઢાળ $m_1, m_2 = (2)(-\frac{1}{2}) = -1$
 સ્પર્શક પરસ્પર લંબ છે \therefore કોનું ખૂણું $= \frac{\pi}{2}$

44) $\int \log(ex) dx = \underline{\hspace{2cm}} + C.$

(A) $x \log(ex)$ (B) $x(\log x - 1) = \log ex(x)$
 (C) $x(\log(ex) + 1)$ (D) $x \log x$
 $= \int \log(ex) \cdot 1 dx$
 $= x \log ex - \int \frac{1}{ex} \cdot x dx$
 $= x(\log e + \log x - 1) + C$
 $= x(1 + \log x - 1) + C = x \log x + C$

संकेत

45) $\int \frac{-x \cos x}{\sin^2 x} dx = \text{_____} + C.$

(A) $-\frac{1}{2} (x \operatorname{cosec}^2 x - \cot x)$

(B) $\frac{1}{2} (x \operatorname{cosec}^2 x + \cot x)$

(C) $x \operatorname{cosec}^2 x + \cot x$

(D) $-\frac{x}{2} \operatorname{cosec}^2 x + \cot x$

$= \int x (\cot x (-\operatorname{cosec}^2 x)) dx$

$= x \frac{\cot^2 x}{2} - \int (1) \cdot \frac{\cot^2 x}{2} dx$

$= \frac{x}{2} (\operatorname{cosec}^2 x - 1) - \frac{1}{2} \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx$

$= \frac{x}{2} (\operatorname{cosec}^2 x - 1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cot x + \frac{1}{2} x + C$

$= \frac{1}{2} (x \operatorname{cosec}^2 x + \cot x) + C$

46) $\int \sqrt{x^2 + 7} dx = \text{_____} + C$

(A) $\log |x + \sqrt{x^2 + 7}|$

(B) $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 7} + \frac{\sqrt{7}}{2} \log |x - \sqrt{x^2 + 7}|$

(C) $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 7} + \frac{7}{2} \log |x + \sqrt{x^2 + 7}|$

(D) $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 7} + \frac{7}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{7}}$

$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + 7} + \frac{7}{2} \log |x + \sqrt{x^2 + 7}| + C$

47) $\int x e^{-x} dx = \text{_____} + C$

(A) $-(x-1)e^{-x}$

(B) $-(x+1)e^{-x}$

(C) $(x-1)e^{-x}$

(D) $(x+1)e^{-x}$

$I = \int x e^{-x} dx$

$= x \left(\frac{e^{-x}}{-1} \right) + \int (1) \frac{e^{-x}}{-1} dx$

$= -x e^{-x} + \frac{e^{-x}}{-1} + C$

$= -e^{-x} (x+1) + C$

$= -e^{-x} (x+1) + C$

$= e^{-x} \log t + C$

$= x \log (1/x) + C$

$= \log (\log x)^x + C$
(P.T.O.)

48) $\int (\log (\log x) + \log_e e) dx = \text{_____} + C$

(A) $\log (\log x) \cdot \log x$

(B) $\log (\log x)$

(C) $(\log (\log x))^x$

(D) $\log (\log x)$

$\log x = t$ in
 $x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

So $I = \int (\log (\log x) + \log_e e) dx$

$= \int (\log (\log x) + \frac{1}{\log 2}) dx$

$= \int (\log t + \frac{1}{\log 2}) e^t dt$

$$\log x = t \quad \text{Am} \quad x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$$

$$\therefore I = \int \frac{6+t}{(7+t)^2} e^t dt$$

$$49) I = \int \frac{6 + \log x}{(7 + \log x)^2} dx = \dots + C = \int e^t \left(\frac{(7+t)-1}{(7+t)^2} \right) dt$$

रखें साथ

$$= \int e^t \left[\frac{1}{7+t} - \frac{1}{(7+t)^2} \right] dt$$

(A) $\frac{x}{7 + \log x}$

(B) $\frac{x}{6 + \log x}$

$$= \frac{e^t}{7+t} - \frac{e^t}{7+t} = \frac{e^t}{7+t} = \frac{x}{7 + \log x}$$

(C) $\frac{1}{6 + \log x}$

(D) $\frac{1}{7 + \log x}$

$$50) \int e^{-x} \cos \frac{x}{2} dx = \dots + C$$

(A) $-\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-x} \cos \left(\frac{x}{2} + \tan^{-1} 2 \right)$

$$= \frac{e^{-x}}{\sqrt{(-1)^2 + (\frac{1}{2})^2}} \cos \left(\frac{x}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{1}{2(-1)} \right) \right) + C$$

(B) $\frac{2e^{-x}}{\sqrt{5}} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)$

$$= \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} \cos \left(\frac{x}{2} + \tan^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \right) + C$$

(C) $-\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-x} \cos \left(\frac{x}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{2} \right)$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-x} \cos \left(\frac{x}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{2} \right) + C$$

(... (for x=0))

(D) $\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-x} \cos \left(\frac{x}{2} + \tan^{-1} 2 \right)$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-x} \cos \left(\pi + \left(\frac{x}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{2} \right) \right) + C$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-x} \cos \left(\frac{x}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{2} \right) + C$$

~~Handwritten scribbles and crossed-out work.~~

050(G)

(MARCH, 2017)
(SEMESTER - IV)

(Part - B)

Time : 2 Hours]

[Maximum Marks : 50

સૂચનાઓ :

- 1) સ્પષ્ટ વંચાય તેવું હસ્તલેખન જાળવવું.
- 2) આ પ્રશ્નપત્રના ભાગ - B માં ત્રણ વિભાગ છે અને 1 થી 18 પ્રશ્નો આપેલા છે.
- 3) બધા જ પ્રશ્નો ફરજિયાત છે. આંતરિક વિકલ્પો આપેલા છે.
- 4) પ્રશ્નની જમણી બાજુના અંક તેના ગુણ દર્શાવે છે.
- 5) નવો વિભાગ નવા પાના પર લખવો.
- 6) પ્રશ્નોના જવાબ ક્રમમાં લખવા.
- 7) વિદ્યાર્થીઓ જરૂર જણાય ત્યાં સાદા કેલ્ક્યુલેટર અને લોગ ટેબલનો ઉપયોગ કરી શકશે.

વિભાગ - A

- નીચેના 1 થી 8 સુધીના પ્રશ્નોના માત્રા મુજબ જવાબ આપો. (દરેક પ્રશ્નના 2 ગુણ છે.)

1) વિધેય $f(x) = \frac{\log x}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$ જે અંતરાલમાં વધતું કે ઘટતું વિધેય હોય તે અંતરાલ શોધો.

2) વક્રો $y^2 = 4x$ તથા $x^2 = -4y$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ (0, 0) સિવાયના છેદબિંદુ આગળ શોધો.

3) $\int (x^3 + x + 1)e^x dx$ શોધો.

4) $\int (1+x)^{-2} \log x dx$ શોધો.

5) વક્ર $y = 4 - x^2$, $x = 2$, $x = 4$ અને X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

અથવા

વક્ર $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ અને રેખા $\sqrt{2}y - 1 = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

6) XY-સમતલમાં સદિશ $3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ને લંબ હોય તેવો એકમ સદિશ શોધો.

7) સદિશો $(2\sqrt{3}, 2)$ અને $(2\sqrt{3}, -2)$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

8) રેખાઓ $\vec{r} = (1, 2, 3) + k(2, 3, 4)$, $k \in \mathbb{R}$ અને

$\vec{r} = (4, 1, 0) + k(5, 2, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ માંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

રેખાઓ $\vec{r} = (-3, 5, 1) + k(2, -1, -1)$, $k \in \mathbb{R}$ અને $\vec{r} = (-3, 5, 1) + k(2, 3, 1)$,

$k \in \mathbb{R}$ નું છેદબિંદુ શોધો. તથા આ રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ શોધો.

વિભાગ - B

■ નીચેના 9 થી 14 સુધીના પ્રશ્નોના માત્રા મુજબ જવાબ આપો. (દરેક પ્રશ્નના 3 ગુણ છે.)

[18]

9) સાબિત કરો કે $\int_0^n f(x) dx = \sum_{r=1}^n \int_0^1 f(t+r-1) dt$.

અથવા

કિંમત શોધો : $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin x} dx$

10) પરવલય $y = x^2 + 2$ તથા રેખાઓ $y = x$, $x = 3$ અને $x = 0$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

11) વિકલ સમીકરણ $4\frac{dy}{dx} + 8y = 5e^{-3x}$ નો ઉકેલ શોધો.

અથવા

વક્રના કોઈ બિંદુ (x, y) આગળના સ્પર્શકનો ઢાળ અને તે બિંદુના y -યામનો ગુણાકાર એ બિંદુના x -યામ જેટલો હોય તથા વક્રબિંદુ $(1, 2)$ માંથી પસાર થતો હોય તો આ વક્રનું સમીકરણ મેળવો.

12) \vec{a} એ \vec{b} અને \vec{c} ને લંબ સદિશ છે. \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} એકમ સદિશો છે.

જો $(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{6}$ અને $\vec{a} = m(\vec{b} \times \vec{c})$ તો m શોધો.

13) બિંદુ $P(9, 6, -2)$ માંથી સમતલ $3x + 3y - 4z - 19 = 0$ પરનો લંબપાદ શોધો તથા બિંદુ P થી આ સમતલનું લંબઅંતર શોધો.

14) $(1, -2, 1)$ માંથી પસાર થતી અને રેખાઓ $x+3=2y=-12z$ તથા

$\frac{x}{2} = \frac{y+6}{2} = \frac{3z-9}{1}$ બંનેને લંબ રેખાનું સદિશ તેમજ કાર્તેઝિય સમીકરણ મેળવો.

વિભાગ - C

■ નીચેના 15 થી 18 સુધીના પ્રશ્નોના માત્ર મુખ્ય જવાબ આપો. (દરેક પ્રશ્નના 4 ગુણ છે.)

[16]

15) કાટકોણ ત્રિકોણના કર્ણ પરના એક બિંદુના કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓથી લંબઅંતર $3\sqrt{3}$ અને 27 છે તો કર્ણની ન્યૂનતમ લંબાઈ શોધો.

16) $\int \operatorname{cosec} \frac{3x}{2} \cdot \sec \frac{x}{2} dx$ શોધો.

17) સરવાળાના લક્ષ્ય તરીકે $\int_{-1}^1 3^x dx$ મેળવો.

અથવા

સાબિત કરો કે $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \log(\sqrt{2}+1)$

18) ઉકેલો : $x \sin\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} + x - y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ તથા પ્રારંભિક શરત $y(1) = \frac{\pi}{2}$ ને
આધીન વિશિષ્ટ ઉકેલ મેળવો.